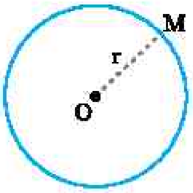
فصل اول

ترسیم‌های هندسی و استدلال

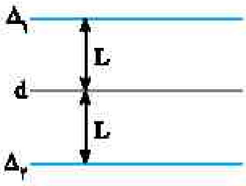
فصل ۱ ترسیم‌های هندسی و استدلال

ترسیم‌های هندسی



برای پیدا کردن تمام نقطه‌هایی که از نقطهٔ ثابت O به فاصلهٔ ثابت r ($r \neq 0$) هستند، کافی است دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم کنیم. نقطه‌های روی این دایره، ویژگی مطلوب را دارند.

M روی دایره $\Leftrightarrow OM = r$



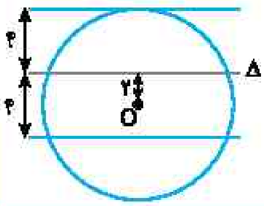
مجموعهٔ نقطه‌هایی که از خط d به فاصلهٔ ثابت L هستند، دو خط موازی با d و به فاصلهٔ L از آن است (دو خط Δ_1 و Δ_2 را در شکل ببینید).

تست ۱

دایرهٔ به مرکز O و شعاع ۶ مفروض است. خط Δ به فاصلهٔ ۲ از نقطهٔ O قرار دارد. چند نقطه روی محیط دایره وجود دارد که فاصله‌اش از خط Δ برابر ۴ باشد؟

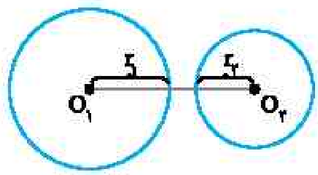
۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

راه‌حل

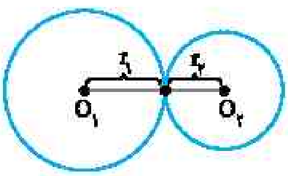


شکل مسئله به صورت مقابل است. می‌دانیم مجموعه نقاطی که از Δ به فاصلهٔ ۴ هستند دو خط موازی Δ به فاصلهٔ ۴ از Δ هستند. چون شعاع دایره برابر ۶ است، یکی از این دو خط موازی مماس بر دایره و دیگری دایره را در دو نقطه قطع می‌کند. پس تعداد نقاطی روی دایره که از Δ به فاصلهٔ ۴ هستند، ۳تا است.

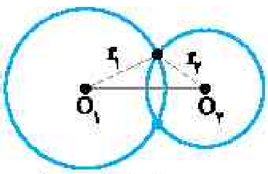
اگر در مسائل ترسیم بخواهیم نقطه‌هایی را به‌دست آوریم که دارای دو یا چند ویژگی هستند، ابتدا نقطه‌های هر ویژگی را جداگانه رسم می‌کنیم، سپس نقطه‌هایی را که در این ترسیم‌ها مشترک هستند به عنوان جواب در نظر می‌گیریم. به عنوان مثال، اگر بخواهیم نقطه‌هایی را که «از نقطهٔ ثابت O_1 به فاصلهٔ r_1 و از نقطهٔ ثابت O_2 به فاصلهٔ r_2 هستند» به‌دست آوریم، باید نقطه‌های مشترک دو دایره، یکی به مرکز O_1 و شعاع r_1 و دیگری به مرکز O_2 و شعاع r_2 را به‌دست آوریم. برای این سؤال بسته به شرایط پنج حالت رخ می‌دهد.



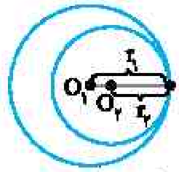
$r_1 + r_2 < O_1O_2$
بدون جواب



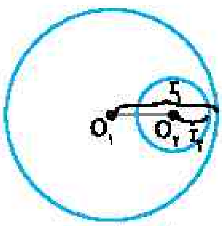
$O_1O_2 = r_1 + r_2$
یک جواب



$|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$
دو جواب



$O_1O_2 = |r_1 - r_2|$
یک جواب



$O_1O_2 < |r_1 - r_2|$
بدون جواب

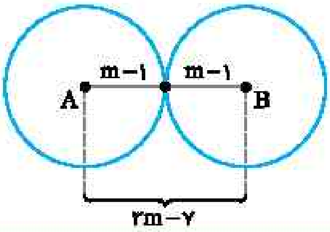
تست ۲

دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $۳m-۷$ واحد از هم قرار دارند. اگر تعداد نقطه‌هایی که از A و B به فاصلهٔ $m-۱$ هستند برابر ۱ باشد، m کدام است؟

۱) ۳   ۲) ۶   ۳) ۴   ۴) ۵

راه‌حل

با شرط‌های داده شده، باید دو دایره به مرکزهای A و B و شعاع $m-۱$ مماس خارج باشند.

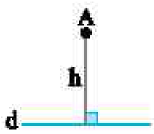


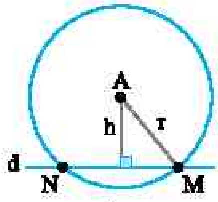
بنابراین

$$۳m-۷=m-۱+m-۱$$

یعنی $m=۵$.

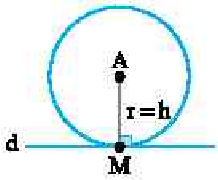
به عنوان مثالی دیگر، در شکل روبه‌رو فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر h است. می‌خواهیم نقطه‌هایی را به‌دست آوریم که روی خط d هستند و از نقطهٔ A به فاصلهٔ r هستند. با مقایسهٔ r و h حالت‌های زیر رخ می‌دهد.





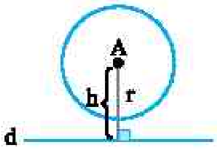
$h<r$

۲ جواب (M و N در شکل)



$r=h$

۱ جواب (M در شکل)



$r<h$

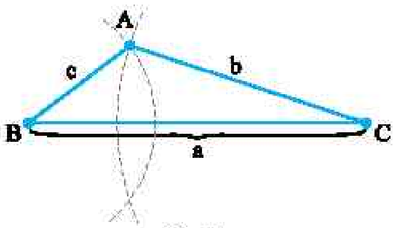
بدون جواب

◆ در مسائل ترسیم شکل، دقت کنید که شکل‌های همنهشت را یکی حساب می‌کنیم. این موضوع را به خصوص برای **رسم مثلث** در خاطر داشته باشید.

◆ **روش رسم مثلث با معلوم بودن طول سه ضلع:** فرض کنید طول سه ضلع مثلث a، b و c است. ابتدا پاره‌خط BC را به طول a رسم می‌کنیم (شکل (۱)). سپس به مرکز B و شعاع c، همچنین به مرکز C و شعاع b کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند (شکل (۲)). ABC مثلث مورد نظر است.

● واضح است که دو کمان رسم شده در صورت متقاطع بودن در پایین BC هم یکدیگر را قطع می‌کنند، اما به دلیل همنهشت بودن دو مثلث آن‌ها را یکی در نظر می‌گیریم.

شکل (۱)



شکل (۲)

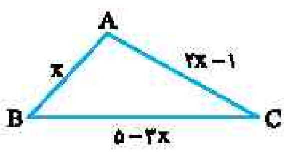
◆ اگر a، b و c عددهای حقیقی و مثبت باشند، برای اینکه این سه عدد بتوانند طول سه ضلع یک مثلث باشند باید

$$a<b+c\ ,\quad b<a+c\ ,\quad c<a+b$$

و برعکس.

تست ۳

در مثلث ABC اگر $AB<AC$، مقدار x کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۱   ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

راه‌حل

از شرط مسئله نتیجه می‌گیریم

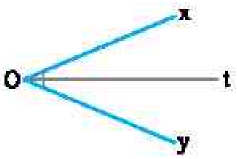
$$AB<AC\Rightarrow x<۲x-۱\Rightarrow ۱<x$$

از طرف دیگر هر ضلع باید از مجموع دو ضلع دیگر کوچک‌تر باشد، پس

$$AC<AB+BC\Rightarrow ۲x-۱<۵-۳x+x\Rightarrow ۴x<۶\Rightarrow x<\frac{۳}{۲}$$

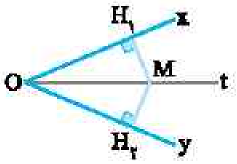
$$BC<AB+AC\Rightarrow ۵-۳x<x+۲x-۱\Rightarrow ۶<۶x\Rightarrow ۱<x$$

مسلماً چون $AB<AC$، پس $AB<AC+BC$. بنابراین اشتراک این نامساوی‌ها، یعنی $۱<x<\frac{۳}{۲}$ حدود تغییرات x است و در بین گزینه‌ها عدد $\sqrt{۲}$ در این فاصله قرار دارد.



نیمساز، ویژگی‌ها و روش رسم آن: به زاویهٔ xOy در شکل مقابل نگاه کنید. اگر نیم‌خط Ot به گونه‌ای باشد که زاویهٔ xOy را به دو قسمت مساوی تقسیم کند، Ot نیمساز زاویهٔ xOy است.

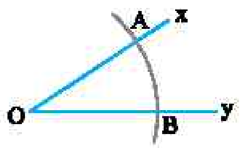
$$Ot \text{ نیمساز } x\hat{O}y \Rightarrow x\hat{O}t = y\hat{O}t$$ است.



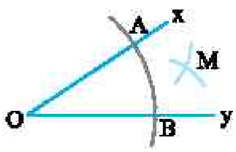
هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از ضلع‌های آن به یک فاصله است و برعکس.

$$M \text{ روی نیمساز } Ot \Leftrightarrow MH_۱ = MH_۲$$

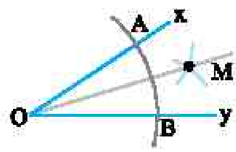
رسم نیمساز: روش اول برای رسم نیمساز زاویهٔ xOy، به مرکز O و شعاع دلخواه کمانی رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند (شکل (۱)). سپس دهانهٔ پرگار را بیش از نصف پاره‌خط AB باز می‌کنیم و دو کمان به مراکز A و B با این دهانه رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند (شکل (۲)). OM نیمساز زاویهٔ xOy است (شکل (۳)).



شکل (۱)

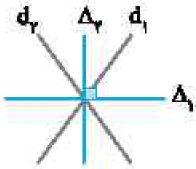


شکل (۲)



شکل (۳)

- در شکل (۲) اگر دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ نصف پاره‌خط AB باز کنیم دو کمان رسم شده از A و B بر یکدیگر مماس می‌شوند. در این حالت محل تماس این دو کمان را همان نقطهٔ M در نظر می‌گیریم.



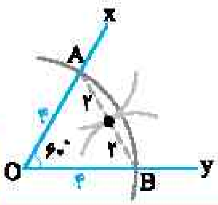
همهٔ نقطه‌هایی که از دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ به یک فاصله هستند، نقطه‌های روی نیمسازهای زاویه‌های بین آن‌ها هستند (خط‌های $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ در شکل). توجه کنید که $\Delta_۱$ و $\Delta_۲$ بر هم عمودند.

تست ۴

زاویهٔ xOy برابر ۶۰° است. به مرکز O کمانی به شعاع چهار واحد رسم کرده‌ایم تا Ox و Oy را به ترتیب در A و B قطع کند. اگر بخواهیم نیمساز زاویهٔ xOy را رسم کنیم، حداقل اندازهٔ شعاع کمان‌هایی که باید به مرکز A و B رسم شوند کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) ۳

راه‌حل



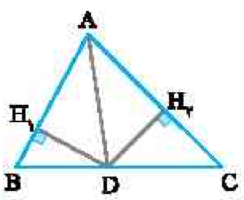
با توجه به اطلاعات مسئله شکل روبه‌رو به‌دست می‌آید. مثلث OAB متساوی‌الاضلاع است، پس $AB = ۴$.
اگر بخواهیم کمان‌های به مرکزهای A و B نقطهٔ مشترک داشته باشند، باید حداقل شعاع این کمان‌ها برابر نصف اندازهٔ پاره‌خط AB، یعنی $\frac{۴}{۲} = ۲$ باشد. توجه کنید که در این حالت کمان‌ها در وسط AB بر یکدیگر مماس می‌شوند.

تست ۵

در مثلث ABC، $AB = ۸$، $AC = ۱۰$ و مساحت این مثلث برابر ۲۷ واحد مربع است. اگر D محل برخورد نیمساز زاویهٔ A با ضلع BC باشد، فاصلهٔ D از ضلع AB کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) ۵

راه‌حل



با توجه به صورت مسئله شکل روبه‌رو به‌دست می‌آید. چون هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است، پس

$$DH_۱ = DH_۲ \qquad (۱)$$

همچنین

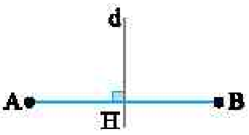
$$S_{ABD} + S_{ACD} = S_{ABC} \Rightarrow \frac{۱}{۲} AB \times DH_۱ + \frac{۱}{۲} AC \times DH_۲ = S_{ABC}$$

$$\frac{۱}{۲} \times ۸ \times DH_۱ + \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times DH_۲ = ۲۷$$

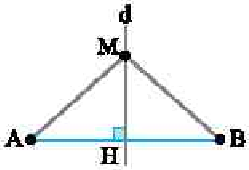
با توجه به برابری (۱)

$$۴DH_۱ + ۵DH_۱ = ۲۷ \Rightarrow ۹DH_۱ = ۲۷ \Rightarrow DH_۱ = ۳$$

◆ **عمودمنصف، ویژگی‌ها و روش رسم آن:** خطی که از وسط یک پاره‌خط می‌گذرد و بر آن پاره‌خط عمود است، عمودمنصف آن پاره‌خط نام دارد.



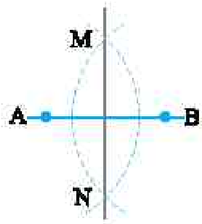
$\begin{cases} H \text{ وسط } AB \\ d \perp AB \end{cases} \Rightarrow$ d عمودمنصف AB است



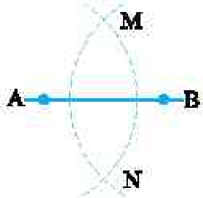
◆ هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، از دو سر آن پاره‌خط به یک فاصله است و برعکس.

M روی عمودمنصف AB است $\Leftrightarrow MA = MB$

◆ **رسم عمودمنصف:** چون با داشتن دو نقطه از خط، آن خط به‌طور کامل مشخص می‌شود، پس برای رسم عمودمنصف، کافی است دو نقطه از آن را به‌دست آوریم. می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم. دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول پاره‌خط AB باز می‌کنیم و به مراکز A و B کمان می‌زنیم تا یکدیگر را در M و N قطع کنند (شکل (۱)). خط MN عمودمنصف پاره‌خط AB است (شکل (۲)).



شکل (۲)



شکل (۱)

● اکنون توانایی پیدا کردن وسط یک پاره‌خط را داریم.

تست ۶

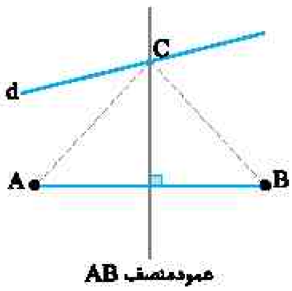
دو نقطهٔ A و B و خط d در صفحه قرار دارند. برای رسم مثلث متساوی‌الساقین به رأس C به طوری که C روی خط d و AB قاعدهٔ آن باشد، کدام حالت ایجاد نمی‌شود؟

۱) یک مثلث منحصربه‌فرد   ۲) مسئله جواب ندارد.   ۳) دو مثلث متمایز   ۴) نامتناهی مثلث

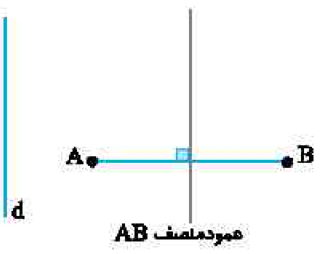
راه‌حل

می‌دانیم نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است، روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. اگر عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم تا خط d را در نقطهٔ C قطع کند، آنگاه ABC مثلث متساوی‌الساقین مورد نظر است. تعداد جواب‌های این مسئله را در حالت‌های زیر بررسی می‌کنیم.

حالت اول اگر عمودمنصف AB خط d را در یک نقطه قطع کند، مسئله یک جواب دارد.



حالت دوم اگر عمودمنصف AB موازی خط d باشد مسئله جواب ندارد.



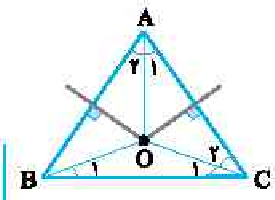
حالت سوم اگر عمودمنصف AB همان خط d باشد، آنگاه مسئله نامتناهی جواب دارد. در واقع هر نقطه از خط d (به‌جز محل برخورد آن با AB) می‌تواند رأس C باشد. بنابراین حالتی که مسئله دو جواب داشته باشد ایجاد نمی‌شود.

تست ۷

در مثلث متساوی‌الساقین ABC، $AB=AC$ و $\hat{A}=70^\circ$. اگر عمودمنصف‌های دو ساق یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند، اندازهٔ زاویهٔ BOC چند برابر اندازهٔ زاویهٔ OBC است؟

۱) ۳ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۱۶

راه‌حل



از نمادگذاری شکل روبه‌رو استفاده می‌کنیم. چون مثلث‌های OAC و OAB با یکدیگر همنهشت هستند، پس

$$\hat{A}_1=\hat{A}_2=\frac{1}{2}\hat{A}=\frac{1}{2}\times 70^\circ=35^\circ$$

همچنین چون مثلث OAC متساوی‌الساقین است، $\hat{C}_2=\hat{A}_1=35^\circ$. اکنون به‌دست می‌آید

$$\hat{C}_1=55^\circ-35^\circ=20^\circ$$

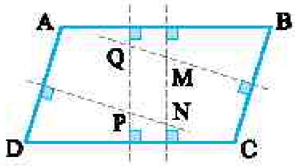
به‌طور مشابه $\hat{B}_1=20^\circ$ و در نهایت $B\hat{O}C=140^\circ$. بنابراین $\frac{B\hat{O}C}{O\hat{B}C}=\frac{140^\circ}{20^\circ}=7$.

تست ۸

متوازی‌الاضلاع $ABCD$ مفروض است $(\hat{A}>\hat{B})$. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از رأس‌های این متوازی‌الاضلاع به یک فاصله است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) نامتناهی

راه‌حل

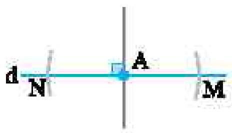


نقطه‌ای که از چهار رأس متوازی‌الاضلاع به یک فاصله است، محل برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های متوازی‌الاضلاع است. در متوازی‌الاضلاع، چون ضلع‌ها با هم موازی هستند، پس عمودمنصف‌ها دوبه‌دو با هم موازی‌اند و همرس نیستند. پس چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

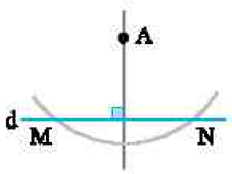
شکل حاصل از برخورد عمودمنصف‌های ضلع‌های متوازی‌الاضلاع در حالت کلی یک متوازی‌الاضلاع است.

در صورت این سؤال ذکر شده است $\hat{A}>\hat{B}$، پس متوازی‌الاضلاع مورد نظر نمی‌تواند مستطیل باشد. اگر این متوازی‌الاضلاع مستطیل بود، آن‌گاه عمودمنصف ضلع‌های روبه‌رو بر هم منطبق بودند و در این حالت یک نقطه به‌دست می‌آمد.

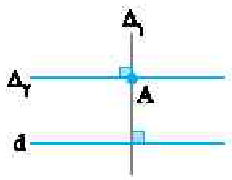
از رسم عمودمنصف AB می‌توان ایده‌ای برای رسم بسیاری از مسائل ترسیم به‌دست آورد. به عنوان مثال:



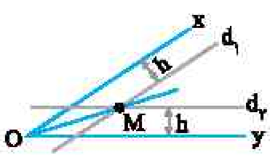
۱) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای روی آن: از A کمانی دلخواه رسم می‌کنیم تا d را در M و N قطع کند. عمودمنصف MN از A می‌گذرد و بر d عمود است.



۲) رسم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای خارج آن: از نقطهٔ A کمانی چنان رسم می‌کنیم تا خط را در نقطه‌های M و N قطع کند. عمودمنصف MN از A می‌گذرد و بر d عمود است.



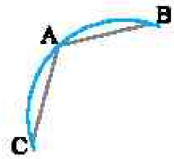
- از دو روش رسم بالا ایدهٔ رسم خط گذرنده از یک نقطه و موازی با یک خط دلخواه به‌دست می‌آید. ابتدا خط Δ_1 را که از A می‌گذرد و بر d عمود است رسم می‌کنیم. سپس خط Δ_2 را که از A می‌گذرد و بر Δ_1 عمود است رسم می‌کنیم. خط Δ_2 با d موازی است و از A می‌گذرد.



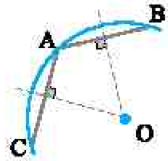
رسم نیمساز: روش دوم مطابق شکل دو خط d_1 و d_2 را به ترتیب موازی Ox و Oy رسم می‌کنیم به‌طوری که d_1 از Ox و همچنین d_2 از Oy به فاصلهٔ h هستند. محل برخورد این دو خط را M می‌نامیم. OM نیمساز زاویهٔ xOy است.

۳) پیدا کردن مرکز دایره: فرض کنید بخشی از دایره در شکل داده شده و می‌خواهیم مرکز این دایره را به‌دست آوریم (شکل (۱)).
سه نقطهٔ متمایز دلخواه روی این کمان در نظر می‌گیریم (A، B و C در شکل (۲)). محل برخورد عمودمنصف‌های AB و AC مرکز دایره است (شکل (۳)).


شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

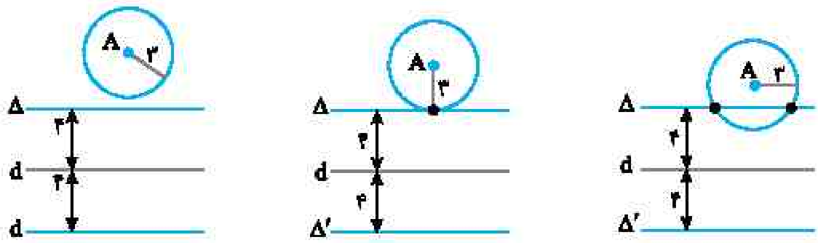
تست ۹

نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. تعداد نقطه‌هایی که از A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر و از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر هستند، کدام است؟

۱) ۱ یا ۲ یا ۴ ۲) فقط ۱ یا ۲ ۳) حداکثر ۲ ۴) حداکثر ۴

راه‌حل

نقطه‌هایی که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر هستند روی دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر قرار دارند و نقطه‌هایی که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر هستند روی دو خط موازی d و به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از آن قرار دارند. جواب‌های مسئله نقاط مشترک دایره و این دو خط موازی هستند. با توجه به عددهای داده شده تعداد جواب‌ها صفر، ۱ یا ۲ است (شکل‌های زیر را ببینید). بنابراین گزینهٔ (۳) درست است.

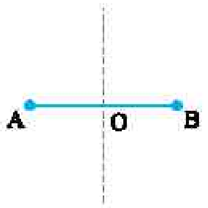


رسم چهارضلعی‌های خاص: برای رسم چهارضلعی‌ها بهتر است ویژگی‌های آن‌ها را در خاطر داشته باشیم.

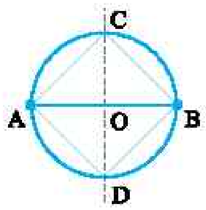
متوازی‌الاضلاع	مستطیل
۱) ضلع‌های مقابل موازی و مساوی‌اند. ۲) قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند.	۱) تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد. ۲) قطرها با هم برابرند.
لوزی	**مربع**
۱) تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع را دارد. ۲) قطرها عمودمنصف هم هستند و نیمساز زاویه‌های لوزی‌اند.	تمام ویژگی‌های متوازی‌الاضلاع، مستطیل و لوزی را دارد.

۱) رسم مربع با معلوم بودن طول قطر آن: پاره‌خط AB را به طول قطر مربع رسم می‌کنیم. عمودمنصف آن را رسم و محل برخورد آن با AB را O می‌نامیم (شکل (۱)). به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در C و D قطع کند (شکل (۲)). $ACBD$ مربع مورد نظر است.

- این مربع منحصربه‌فرد است.



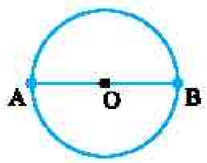
شکل (۱)



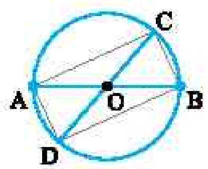
شکل (۲)

۲) رسم مستطیل با معلوم بودن طول قطر آن: پاره‌خط AB را به طول قطر مستطیل رسم می‌کنیم (شکل (۱)). به مرکز O (وسط AB) و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل (۲)). قطر دلخواه CD (به جز AB) از این دایره را رسم می‌کنیم (شکل (۳)). $ACBD$ مستطیل مورد نظر است.

شکل (۱)



شکل (۲)



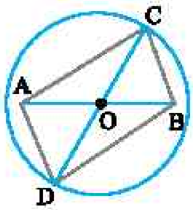
شکل (۳)

- این مستطیل منحصربه‌فرد نیست. واضح است که اگر زاویهٔ بین دو قطر هم معلوم بود، آن وقت مستطیل منحصربه‌فرد می‌شد.

۳) رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن طول دو قطر: ابتدا پاره‌خط AB را به طول یکی از قطرها رسم می‌کنیم (شکل (۱)). سپس به مرکز O (وسط AB) و شعاع نصف قطر دیگر دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل (۲)). قطر دلخواه CD از این دایره را طوری که AB روی آن منطبق نشود رسم می‌کنیم. $ACBD$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

- واضح است که نامتناهی متوازی‌الاضلاع با این ویژگی می‌توان رسم کرد.

شکل (۱)



شکل (۲)

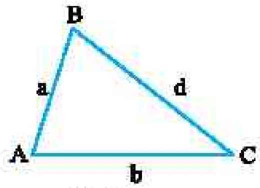
۴) رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن طول دو ضلع و طول یکی از قطرها:

روش اول: فرض کنید a و b طول دو ضلع و d طول یکی از قطرها باشد. ابتدا مثلث ABC را با طول ضلع‌های a، b و d رسم می‌کنیم (شکل (۱)). از نقطهٔ B خطی موازی AC و از نقطهٔ C خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند (شکل (۲)). $ABDC$ متوازی‌الاضلاع مورد نظر است.

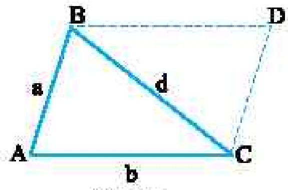
- این متوازی‌الاضلاع زمانی قابل رسم است که

$$a < b + d\,,\quad b < a + d\,,\quad d < a + b$$

همچنین در صورت قابل رسم بودن، منحصربه‌فرد است.

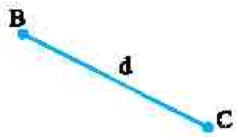


شکل (۱)

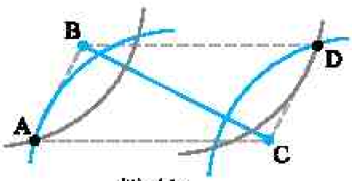


شکل (۲)

روش دوم: ابتدا پاره‌خط BC را به طول d رسم می‌کنیم (شکل (۱)). دهانهٔ پرگار را یک بار به طول a و یک بار به طول b باز می‌کنیم و از نقطه‌های B و C دو کمان می‌زنیم (شکل (۲)). مطابق شکل، دو نقطه از نقطه‌های برخورد کمان‌ها را A و D می‌نامیم. $ABDC$ متوازی‌الاضلاع مطلوب است. (دلیل: از همنهشتی دو مثلث BDC و CAB به حالت برابری سه ضلع ثابت می‌شود که $ABDC$ متوازی‌الاضلاع است.)



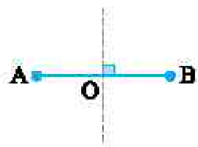
شکل (۱)



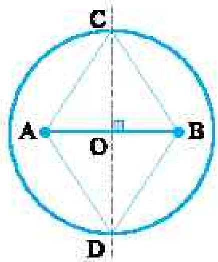
شکل (۲)

۵) رسم لوزی با معلوم بودن طول دو قطر: فرض کنید d_1 و d_2 طول دو قطر لوزی هستند. ابتدا پاره‌خط AB به طول d_1 و سپس عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم (شکل (۱)). به مرکز O و شعاع $\frac{d_2}{2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمودمنصف را در دو نقطهٔ C و D قطع کند (شکل (۲)). $ACBD$ لوزی مورد نظر است.

- این لوزی منحصربه‌فرد است.



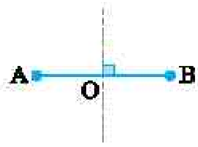
شکل (۱)



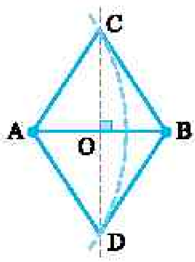
شکل (۲)

۶) رسم لوزی با معلوم بودن طول ضلع و طول یک قطر: فرض کنید a طول ضلع و d طول قطر لوزی است. ابتدا پاره‌خط AB به طول d و سپس عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم (شکل (۱)). به مرکز A و شعاع a کمانی رسم می‌کنیم تا عمودمنصف AB را در C و D قطع کند (شکل (۲)). $ACBD$ لوزی مورد نظر است.

- واضح است که با فرض $a > \frac{d}{2}$ این لوزی منحصربه‌فرد است.



شکل (۱)



شکل (۲)

تست ۱۰

به ازای کدام‌یک از اطلاعات داده شده، چهارضلعی به صورت منحصربه‌فرد قابل رسم نیست؟

۱) داشتن طول دو قطر لوزی
۲) داشتن طول و عرض مستطیل
۳) داشتن طول دو قطر متوازی‌الاضلاع
۴) داشتن طول قطر مربع

راه‌حل

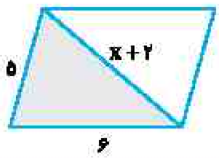
چون زاویهٔ بین دو قطر متوازی‌الاضلاع معلوم نیست، با تغییر این زاویه، نامتناهی متوازی‌الاضلاع قابل ترسیم است.

تست ۱۱

در یک متوازی‌الاضلاع، طول دو ضلع ۵ و ۶ و طول یک قطر $x+2$ است. به ازای چند مقدار صحیح برای x می‌توان این متوازی‌الاضلاع را رسم کرد؟

۱) ۹ ۲) ۱۰ ۳) ۸ ۴) نامتناهی

راه‌حل



فرض کنیم متوازی‌الاضلاع مورد نظر به صورت شکل روبه‌رو است. برای این که این متوازی‌الاضلاع قابل رسم باشد باید مثلث رنگی را بتوانیم رسم کنیم و برای رسم این مثلث باید

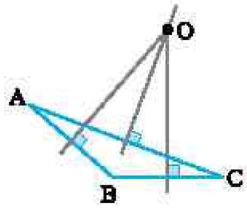
$$x+2<5+6,\quad 5<6+x+2,\quad 6<x+2+5$$

به‌دست می‌آید $-1<x<9$. پس برای x، ۹ مقدار صحیح صفر، ۱، ۲، ... و ۸ به‌دست می‌آید.

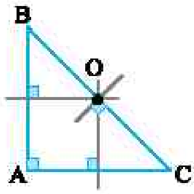
استدلال

- اگر از مشاهدات و بررسی موضوعی در چند حالت محدود، نتیجه‌ای کلی در آن موضوع بگیریم یا به اصطلاح «از جزء به کل برسیم»، این روش را «**استدلال استقرایی**» می‌نامیم.
- در استدلال استقرایی، نمی‌توان همواره به درستی نتیجهٔ گرفته شده مطمئن بود.
- اگر براساس واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم نتیجه‌ای کلی بگیریم، این روش استدلال را «**استدلال استنتاجی**» می‌نامیم.
- برخی از نتایج که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند:

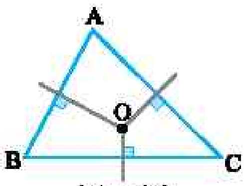
۱) عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث همرس هستند (در یک نقطه به هم می‌رسند).



(مثلث منفرجه)
محل همرسی خارج مثلث



(مثلث قائم‌الزاویه)
محل همرسی وسط وتر

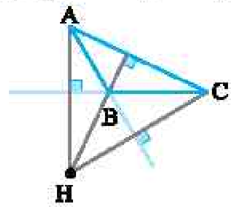


(مثلث حاده)
محل همرسی درون مثلث

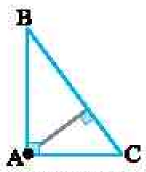
- محل همرسی عمودمنصف‌های ضلع‌های مثلث از سه رأس مثلث به یک فاصله است.

محل برخورد عمودمنصف‌ها $O \Rightarrow OA=OB=OC$

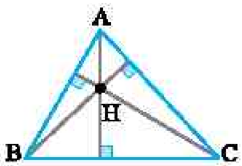
۲) ارتفاع‌های مثلث (یا امتداد آن‌ها) همرس‌اند.



(مثلث منفرجه)
خارج مثلث



(مثلث قائم‌الزاویه)
رأس قائم

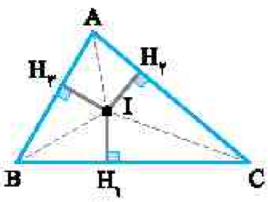


(مثلث حاده)
درون مثلث

۳) سه نیمساز زاویه‌های داخلی مثلث، درون مثلث همرس هستند.

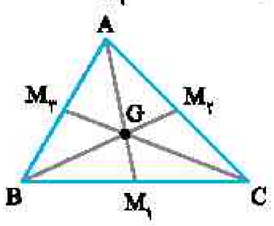
- محل همرسی نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث از سه ضلع مثلث به یک فاصله است.

محل همرسی نیمسازها $I \Rightarrow IH_1=IH_2=IH_3$



۴) میانه‌های ضلع‌های هر مثلث در نقطه‌ای درون آن همرس هستند.

- محل همرسی میانه‌های مثلث را **مرکز ثقل** مثلث می‌نامیم و معمولاً آن را با G نشان می‌دهیم.



تست ۱۲

اگر در مثلث ABC، $\hat{A}+\hat{B}=5\hat{C}$ و $\hat{B}-2\hat{C}=\frac{4}{5}\hat{A}$، آن‌گاه نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های ضلع‌های این مثلث کجا قرار دارد؟

۱) درون مثلث ۲) بیرون مثلث ۳) وسط یک ضلع ۴) روی رأس زاویهٔ بزرگ‌تر

راه‌حل از برابری‌های $\hat{A}+\hat{B}=5\hat{C}$ و $\hat{B}-2\hat{C}=\frac{4}{5}\hat{A}$ و توجه به این مطلب که $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ به‌دست می‌آید $\hat{A}=50^\circ$، $\hat{B}=100^\circ$ و $\hat{C}=30^\circ$.

در نتیجه مثلث منفرجه است و محل برخورد عمودمنصف‌ها خارج مثلث است.

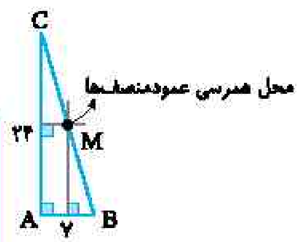
تست ۱۳

در مثلث ABC اگر $AB=7$، $AC=24$ و عمودمنصف‌های این دو ضلع بر هم عمود باشند، مجموع فاصله‌های محل برخورد این عمودمنصف‌ها از دو رأس B و C کدام است؟

۱) 25 ۲) $\frac{25}{2}$ ۳) $\sqrt{527}$ ۴) 31

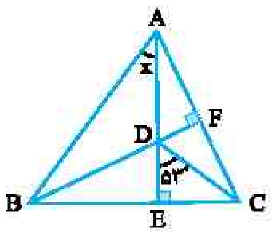
راه‌حل با توجه به شکل چون عمودمنصف‌های ضلع‌های AB و AC بر هم عمود هستند، پس مثلث ABC در رأس A قائم‌الزاویه است و عمودمنصف‌های آن در وسط وتر BC همرس هستند (نقطهٔ M را در شکل ببینید). اکنون به‌دست می‌آید

$$MB+MC=BC=\sqrt{AB^2+AC^2}=\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{625}=25$$



تست ۱۴

در شکل مقابل، مقدار x کدام است؟



۱) 37°

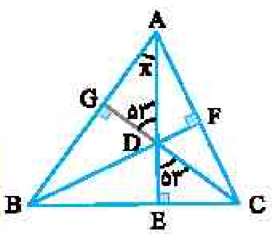
۲) 53°

۳) 36°

۴) 23°

راه‌حل CD را امتداد می‌دهیم تا ضلع AB را در G قطع کند (شکل را ببینید). چون ارتفاع‌های مثلث همرس هستند، پس CG ارتفاع وارد بر ضلع AB است. اکنون به‌دست می‌آید

$$x=90^\circ-53^\circ=37^\circ$$



گزاره: جمله‌ای است خبری که حتماً درست یا نادرست است (اگرچه درست یا نادرست بودن آن برای ما معلوم نباشد). به عنوان مثال

۱) در مثلث متساوی‌الساقین، زاویه‌های روبه‌رو به ساق‌ها با هم برابرند (گزارهٔ درست).

۲) مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° نیست (گزارهٔ نادرست).

۳) اندازهٔ هر زاویهٔ خارجی مثلث برابر مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاورش است (گزارهٔ درست).

۴) هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است (گزارهٔ درست).

گزارهٔ ساده گزاره‌ای است که فقط یک خبر را اعلام می‌کند و **گزارهٔ مرکب** گزاره‌ای است که ترکیبی از چند گزارهٔ ساده است.

نقیض یک گزاره: اگر p یک گزاره باشد، گزارهٔ «چنین نیست که p» را نقیض گزارهٔ p می‌گوییم.

- ارزش نقیض یک گزاره مخالف ارزش خود گزاره است.

نکاتی در مورد نقیض گزاره‌ها: علاوه بر قرار دادن «چنین نیست که» در ابتدای گزاره می‌توان به صورت زیر عمل کرد:

۱) اگر در گزاره «هر»، «به ازای هر» یا «همه» وجود داشته باشد، آن را به «وجود دارد» تغییر دهید و فعل جمله را نقیض کنید (یعنی است بشود نیست، می‌خواهد بشود نمی‌خواهد و ...). به عنوان مثال:

الف) گزاره: مجموع زوایای **هر** مثلث 180° **است**. (درست)

نقیض گزاره: مثلثی **وجود دارد** که مجموع زوایای آن 180° **نیست**. (نادرست)

ب) گزاره: **هر** لوزی یک مربع **است**. (نادرست)

نقیض گزاره: لوزی‌ای **وجود دارد** که مربع **نیست**. (درست)

پ) گزاره: مجموع زاویه‌های داخلی **هر** چهارضلعی محدب برابر 360° **است**. (درست)

نقیض گزاره: چهارضلعی محدبی **وجود دارد** که مجموع زاویه‌های داخلی آن 360° **نیست**. (نادرست)

۲) اگر در گزاره «وجود دارد» باشد، آن را به «هر»، «به ازای هر» یا «همه» تغییر دهید و فعل جمله را نقیض کنید. مثلاً

الف) گزاره: مستطیلی **وجود دارد** که مربع **نیست**. (درست)

نقیض گزاره: همهٔ مستطیل‌ها مربع هستند. (نادرست)

ب) گزاره: چهارضلعی‌ای **وجود دارد** که مجموع زاویه‌های داخلی آن 360° **نیست**. (نادرست)

نقیض گزاره: در **هر** چهارضلعی، مجموع زاویه‌های داخلی 360° **است**. (درست)

۳) اگر در گزاره‌ای «هیچ» یا «وجود ندارد» باشد، آن را به «وجود دارد» تغییر دهید و فعل جمله را نقیض کنید. برای مثال:

گزاره: **هیچ** مثلثی بیش از یک زاویهٔ قائمه **ندارد**. (درست)

نقیض گزاره: مثلثی **وجود دارد** که بیش از یک زاویهٔ قائمه **داشته باشد**. (نادرست)

گزارهٔ شرطی: گزاره‌ای است که خبری را با یک جملهٔ شرطی بیان می‌کند.

قضیه: نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند قضیه نامیده می‌شوند.

به عبارت دقیق‌تر، قضیه گزاره‌ای است درست که بتوان درستی آن را با استدلال استنتاجی معلوم کرد.

- قضیه ممکن است گزاره‌ای معمولی یا گزاره‌ای شرطی باشد.

هر قضیه دو قسمت دارد:

قسمت اول گزاره یا گزاره‌هایی است که درستی بودن آن‌ها را قبول داریم. این قسمت را **فرض قضیه** می‌نامیم.

قسمت دوم گزاره‌ای است که درست بودن آن را باید از فرض نتیجه گرفت. این قسمت را **حکم قضیه** می‌نامیم. مثلاً

$\underbrace{\text{مثلثی که دو زاویهٔ برابر دارد،}}_{\text{فرض قضیه}}$ $\underbrace{\text{متساوی‌الساقین است.}}_{\text{حکم قضیه}}$

اگر در یک قضیه، جای فرض و حکم را عوض کنیم، گزاره‌ای به‌دست می‌آید که آن را **عکس قضیهٔ** مورد نظر می‌نامیم.

- عکس قضیه ممکن است درست یا نادرست باشد.

اگر عکس یک قضیه درست باشد، این قضیه و عکس آن را می‌توان به صورت یک قضیه بیان کرد. چنین قضیه‌ای را «**قضیهٔ دو شرطی**» می‌نامیم.

- می‌توان قضیهٔ دو شرطی را با استفاده از «اگر و تنها اگر» بیان کرد که نماد آن « $\Leftrightarrow$ » است.

به مثالی که برای رد درستی یک ادعا بیان می‌شود **مثال نقض** می‌گوییم.

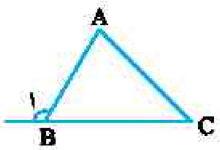
برهان خلف (برهان غیرمستقیم): نوعی استدلال است که در مسائل ریاضی و هندسی کاربرد دارد. در روش برهان خلف به صورت زیر عمل می‌کنیم

گام (۱): فرض می‌کنیم نقیض حکم درست است.

گام (۲): نشان می‌دهیم که نقیض حکم با حقایق دانسته شده یا فرض اولیه تناقض دارد.

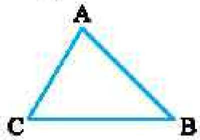
گام (۳): با نادرست بودن نقیض حکم نتیجه می‌گیریم که حکم درست است.

برخی از نکات قضایای مهم:



۱) هر زاویهٔ خارجی مثلث از هر زاویهٔ داخلی غیرمجاورش بزرگ‌تر است.

$$\hat{B}_1 > \hat{A}\ ,\quad \hat{B}_1 > \hat{C}$$



۲) اگر در مثلثی دو ضلع نابرابر باشند، زاویهٔ مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویهٔ مقابل به ضلع کوچک‌تر و برعکس.

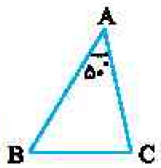
$$AB > AC \Leftrightarrow \hat{C} > \hat{B}$$

تست ۱۵

در مثلث ABC، $B\hat{A}C = ۵۰^\circ$ و $AB > AC$. بزرگ‌ترین مقدار صحیح زاویهٔ B برحسب درجه کدام است؟

۱) ۶۲° ۲) ۶۳° ۳) ۶۴° ۴) ۶۵°

راه‌حل

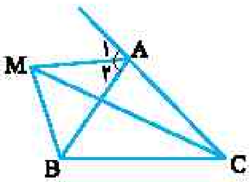


چون $\hat{A} = ۵۰^\circ$، پس $\hat{B} + \hat{C} = ۱۳۰^\circ$. از $AB > AC$ نتیجه می‌گیریم $\hat{C} > \hat{B}$. بنابراین

$$\hat{B} + \hat{C} > \hat{B} + \hat{B} \Rightarrow ۱۳۰^\circ > ۲\hat{B}$$

یعنی $\hat{B} < ۶۵^\circ$. در نتیجه بزرگ‌ترین مقدار صحیح برای زاویهٔ B برابر ۶۴° است.

تست ۱۶



در شکل مقابل M روی نیمساز خارجی زاویهٔ A قرار دارد. نسبت محیط مثلث MBC به محیط مثلث ABC کدام است؟

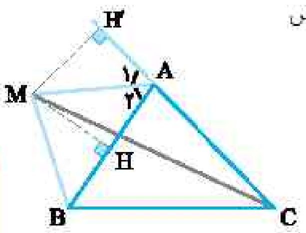
۱) بزرگ‌تر از ۱ ۲) کمتر از ۱

۳) مساوی ۱ ۴) غیرمشخص

راه‌حل

نقطهٔ M روی نیمساز خارجی $\hat{A}$ قرار دارد، پس فاصلهٔ M از دو ضلع زاویهٔ خارجی A برابر است. پس $MH = MH'$.

$$\triangle MH'C: \hat{H}' > \hat{M} \Rightarrow MC > H'C \Rightarrow MC > AC + AH' \quad (۱)$$



چون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH' و AMH به حالت وتر و یک ضلع مساوی همنهشت هستند، پس $AH = AH'$. از نابرابری (۱) نتیجه می‌گیریم

$$MC > AC + AH \quad (۲)$$

از طرف دیگر،

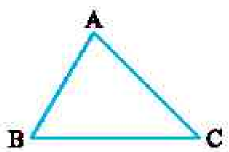
$$\triangle MBH: \hat{H} > \hat{M} \Rightarrow MB > BH \quad (۳)$$

از جمع کردن نابرابری‌های (۲) و (۳) به‌دست می‌آید

$$MC + MB > AC + AH + BH \Rightarrow MC + MB > AC + AB$$

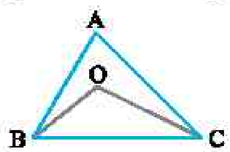
$$MC + MB + BC > AC + AB + BC \Rightarrow \text{محیط } MBC > \text{محیط } ABC$$

بنابراین نسبت محیط مثلث MBC به محیط مثلث ABC عددی بزرگ‌تر از ۱ است.



۳) در هر مثلث، طول هر ضلع بین مجموع و قدرمطلق تفاضل طول‌های دو ضلع دیگر قرار دارد.

$$|AB - AC| < BC < AB + AC$$



۴) در شکل مقابل، نقطهٔ دلخواه O درون مثلث است. در این صورت

الف) $B\hat{O}C > B\hat{A}C$

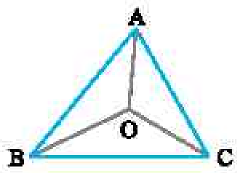
ب) $AB + AC > BO + OC$

اگر O نقطهٔ دلخواه درون مثلث ABC باشد، آن‌گاه

$$\text{نصف محیط}(\triangle ABC) < OA + OB + OC < \text{محیط}(\triangle ABC)$$

تست ۱۷

در مثلث ABC، $AB=۳$ ، $AC=۳-\sqrt{۲}$ ، $BC=۲+\sqrt{۲}$ و O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC است. مجموع محیط‌های سه مثلث OAC ،OBC و OAB کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۱۲　　۲) ۱۵
۳) ۲۲　　۴) ۲۴

راه‌حل

اگر O نقطه‌ای دلخواه درون مثلث ABC باشد، آن‌گاه

$$\text{نصف محیط}(\triangle ABC) < OA+OB+OC < \text{محیط}(\triangle ABC) \Rightarrow ۴ < OA+OB+OC < ۸ \quad (۱)$$

از طرف دیگر،

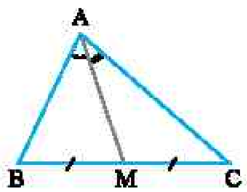
$$\text{محیط}(\triangle OAB)+\text{محیط}(\triangle OBC)+\text{محیط}(\triangle OAC) = ۲(OA+OB+OC)+\text{محیط}(\triangle ABC) = ۲(OA+OB+OC)+۸$$

اکنون از نابرابری (۱) به‌دست می‌آید

$$۱۶ < ۲(OA+OB+OC)+۸ < ۲۴$$

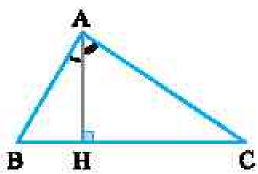
۵) الف) در مثلث ABC، اگر BC بزرگ‌ترین ضلع باشد، آن‌گاه $\hat{A} > ۶۰^\circ$.

ب) در مثلث ABC، اگر BC کوچک‌ترین ضلع باشد، آن‌گاه $\hat{A} < ۶۰^\circ$.



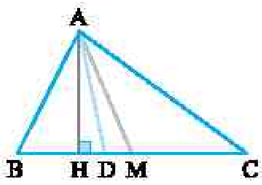
۶) الف) در مثلث ABC اگر AM میانهٔ وارد بر ضلع BC باشد و $AB < AC$ ، آن‌گاه

$$C\hat{A}M < B\hat{A}M$$



ب) در مثلث ABC اگر AH ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد و $AB < AC$ ، آن‌گاه

$$B\hat{A}H < C\hat{A}H$$



در مثلث $ABC\ (AB \neq AC)$ همواره نیمساز زاویهٔ A بین میانه و ارتفاع وارد بر ضلع BC است. همچنین

$$\underset{\text{ارتفاع}}{AH} < \underset{\text{نیمساز}}{AD} < \underset{\text{میانه}}{AM}$$

تست ۱۸

در مثلث مختلف‌الاضلاع ABC میانهٔ AM و نیمساز داخلی AD رسم شده است. کدام نابرابری همواره درست است؟

۱) $AM < BC$　　۲) $AM < AB$　　۳) $AD < AB$　　۴) $AD < AM$

راه‌حل

در هر مثلث (به‌جز مثلث متساوی‌الساقین) اگر AH ارتفاع، AD نیمساز و AM میانه باشد، آن‌گاه $AH < AD < AM$. توجه کنید در مثلث متساوی‌الساقین $(AB=AC)$ ، AH ،AD و AM بر هم منطبق می‌شوند.

محاسبات

آزمون ۱ ترسیم‌های هندسی

راه‌حل: ۱۲۰ تا ۱۲۱

۱- نقطهٔ A به فاصلهٔ $۲m+۳$ از خط d قرار دارد. به ازای چند مقدار صحیح m دقیقاً دو نقطه روی خط d به فاصلهٔ ۶ از نقطهٔ A وجود دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۲- دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $۴x-۵$ واحد از یکدیگر قرار دارند و دو نقطه در صفحه وجود دارند که از A به فاصلهٔ $x+۱$ و از B به فاصلهٔ $۲x-۱$ هستند. به ازای چند مقدار صحیح برای x این اتفاق می‌افتد؟

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۱

۳- حداکثر چند نقطه روی دایره به قطر ۵ واحد وجود دارد که از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ واحد هستند؟

۱) دو نقطه ۲) سه نقطه ۳) یک نقطه ۴) چهار نقطه

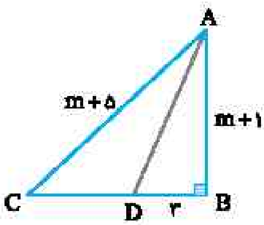
۴- خط d به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از مرکز دایره‌ای به شعاع ۵ سانتی‌متر قرار دارد. روی این دایره چند نقطه وجود دارد که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر هستند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵- نقطهٔ A و خط d در یک صفحه قرار دارند. فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d برابر ۱۲ سانتی‌متر است. چند نقطه در این صفحه وجود دارند که از نقطهٔ A و خط d به فاصلهٔ ۹ سانتی‌متر هستند؟

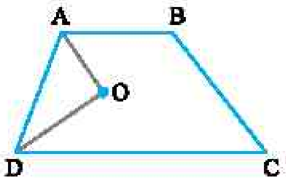
۱) حداکثر ۴ ۲) حداکثر ۲ ۳) دقیقاً ۴ ۴) دقیقاً ۲

۶- در شکل مقابل AD نیمساز زاویهٔ A است. طول DC برابر کدام است؟



۱) ۵
۲) ۴
۳) ۳
۴) ۲

۷- در ذوزنقهٔ $ABCD$ نقطهٔ O محل تقاطع دو نیمساز زاویه‌های A و D است. اگر فاصلهٔ رأس B از قاعدهٔ DC برابر ۶ باشد، مجموع فاصله‌های نقطهٔ O از دو قاعده و ساق AD برابر کدام است؟



۱) ۴
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۲

۸- در رسم مثلث ABC با خط‌کش و پرگار با معلوم بودن دو ضلع $b=۷$ و $c=۵$ و میانهٔ $m_a=۴$ کدام نتیجه حاصل می‌شود؟

۱) غیرقابل رسم ۲) جواب منحصربه‌فرد ۳) دو جواب متمایز ۴) فاقد جواب

۹- در چهارضلعی $ABCD$ نقطهٔ M از دو سر ضلع CD به یک فاصله و همچنین از دو ضلع AD و CD به یک فاصله است. این نقطه حاصل برخورد کدام دو جزء است؟

۱) عمودمنصف‌های CD و AC ۲) نیمسازهای دو زاویهٔ C و D

۳) عمودمنصف CD و نیمساز زاویهٔ D ۴) خط موازی CD و عمودمنصف CD

۱۰- کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر را نمی‌توان به‌صورت منحصربه‌فرد رسم کرد؟

۱) مربعی که طول قطر آن ۱ سانتی‌متر است.

۲) لوزی که طول قطرهای آن ۱ و ۲ سانتی‌متر است.

۳) متوازی‌الاضلاعی که طول قطرهای آن ۲ و ۳ سانتی‌متر است.

۴) مربعی که طول ضلع آن $\sqrt{۲}$ سانتی‌متر است.

محاسبات

استدلال

آزمون ۲

راه‌حل: ۱۲۱ تا ۱۲۲

۱- کدام گزینه بیانگر استدلال استقرایی است؟

۱) نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

۲) بررسی و مشاهدهٔ درستی موضوعی در چند حالت و رسیدن به نتیجه‌ای کلی در آن موضوع.

۳) بررسی چگونگی انطباق یک دستور کلی در مورد یک عضو از یک مجموعه.

۴) مطابقت یک حکم کلی با یک یا چند حکم دیگر.

۲- کدام قضیه به صورت قضیهٔ دو شرطی بیان نمی‌شود؟

۱) در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع و میانهٔ یک ضلع یکی هستند.

۲) در مثلث قائم‌الزاویه نقطهٔ همرسی عمودمنصف اضلاع روی وتر است.

۳) در مثلث متساوی‌الاضلاع زاویه‌ها برابر 60° هستند.

۴) در هر مثلث ضلع مقابل به زاویهٔ 90° بزرگ‌ترین ضلع است.

۳- برای اثبات قضیهٔ «در مثلث ABC، $BC > AC$ هرگاه $\hat{A} > \hat{B}$» به روش برهان خلف، با کدام فرض اثبات را آغاز می‌کنیم؟

۱) $\hat{A} = \hat{B}$ یا $\hat{A} < \hat{B}$

۲) $\hat{A} < \hat{B}$

۳) $BC < AC$

۴) $BC = AC$ یا $BC < AC$

۴- حکم کلی «نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع مثلث یا در داخل آن است یا در خارج آن» با کدام مثال نقض رد می‌شود؟

۱) مثلث متساوی‌الساقین ۲) مثلث متساوی‌الاضلاع ۳) مثلث قائم‌الزاویه ۴) مثلث منفرجه

۵- نقیض گزارهٔ «مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است» کدام است؟

۱) چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° نباشد.

۲) مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث کمتر از 180° است.

۳) مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° نیست.

۴) مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° است.

۶- در مثلث ABC کدام گزینه نادرست است؟

۱) زاویهٔ بین دو نیمساز زاویه‌های داخلی B و C برابر $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ است.

۲) زاویهٔ بین دو نیمساز زاویه‌های خارجی B و C برابر $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ است.

۳) زاویهٔ بین نیمساز زاویهٔ داخلی B و نیمساز زاویهٔ خارجی C برابر $\frac{\hat{A}}{2}$ است.

۴) زاویهٔ بین نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی $\hat{A}$ برابر 60° است.

۷- مثلثی به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ مفروض است. اگر فاصلهٔ نقطهٔ همرسی نیمسازهای این مثلث از ضلع به طول ۶ برابر $m-4$ و از ضلع به طول ۸ برابر $2m-10$ باشد، فاصلهٔ آن از ضلع بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

۸- اگر $AB = 2x-1$، $AC = x+4$ و $BC = 5x+1$، به ازای کدام مقدار x مثلث ABC قابل رسم است؟

۱) $\frac{2}{3}$ ۲) $\frac{3}{5}$ ۳) $\frac{3}{4}$ ۴) $\frac{1}{2}$

۹- اگر در مثلث ABC، $\hat{B} = 55^\circ$، $\hat{A} = 67^\circ$، $BC = m$، $AC = 2$ و $AB = n$، کدام گزینه درست است؟

۱) $m < 2 < n$ ۲) $n > m > 2$ ۳) $m < n < 2$ ۴) $2 < n < m$

۱۰- در مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، ساق AB را از طرف B به اندازهٔ $BD = BC$ امتداد می‌دهیم. اگر CD برابر AC باشد، نقطهٔ تلاقی عمودمنصف‌های مثلث ADC کجا واقع است؟

۱) درون مثلث ۲) بیرون مثلث ۳) رأس C ۴) وسط AD

محاسبات

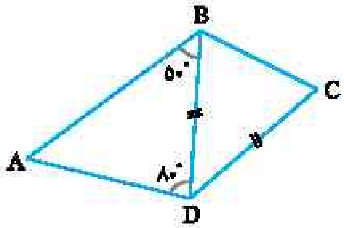
آزمون ۳ — آزمون جامع

راه‌حل: ۱۲۲ تا ۱۲۳

۱- در مثلث حادهٔ ABC نقطهٔ O محل برخورد عمودمنصف‌های دو ضلع AB و AC است. اندازهٔ زاویهٔ BOC کدام است؟

۱) $2\hat{A}$ ۲) $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ ۳) $90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ ۴) $180^\circ - 2\hat{A}$

۲- در شکل مقابل کدام گزینه همواره درست است؟



۱) رأس B روی نیمساز زاویهٔ ADC است.

۲) خط AC عمودمنصف پاره‌خط BD است.

۳) خط BD عمودمنصف پاره‌خط AC است.

۴) رأس D روی عمودمنصف پاره‌خط AC است.

۳- مثلث ABC مفروض است. نیمسازهای دو زاویهٔ B و C یکدیگر را در نقطهٔ I قطع می‌کنند. نقطهٔ I حتماً:

۱) روی عمودمنصف ضلع BC است. ۲) روی میانهٔ نظیر ضلع BC است.

۳) روی محیط مثلث است. ۴) روی نیمساز زاویهٔ A است.

۴- خط موربی دو خط موازی d و d' را به ترتیب در نقطه‌های B و C قطع می‌کند. اگر نقطهٔ O از هر سه خط به یک فاصله باشد، زاویهٔ BOC چند درجه است؟

۱) 105° ۲) 95° ۳) 90° ۴) 75°

۵- چند مورد از گزاره‌های زیر با مثال نقض رد می‌شوند؟

الف) هر چهارضلعی که اضلاع برابر دارد، مربع است.

ب) ارتفاع مثلث با ضلع کوچک‌تر، زاویهٔ کوچک‌تری می‌سازد.

پ) نقطه‌ای که از اضلاع مثلث یا امتداد آن‌ها به یک فاصله باشد، داخل مثلث است.

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

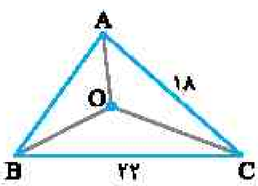
۶- در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ فاصلهٔ نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌ها از دو ضلع مثلث ۲ و $\sqrt{5}$ است. طول وتر مثلث کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) $5\sqrt{2}$ ۴) $6\sqrt{2}$

۷- در چهارضلعی $ABCD$ $(\hat{A}=\hat{B}=90^\circ)$ رأس C محل تلاقی نیمساز زاویهٔ داخلی A و عمودمنصف ضلع AD است. اگر $AB=4$، محیط چهارضلعی $ABCD$ برابر کدام است؟

۱) $16+2\sqrt{2}$ ۲) $12+4\sqrt{2}$ ۳) $8+2\sqrt{2}$ ۴) $16+4\sqrt{2}$

۸- در شکل روبه‌رو، O نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های داخلی مثلث ABC است. اگر مساحت مثلث AOC برابر ۸۱ باشد، مساحت مثلث BOC برابر کدام است؟



۱) ۱۰۰ ۲) ۹۰

۳) ۹۹ ۴) ۹۲

۹- مثلث دلخواه ABC مفروض است. از رأس‌های این مثلث خط‌هایی موازی ضلع مقابل به آن رأس رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ به‌دست آید. نقطهٔ برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC برای مثلث $A'B'C'$ چه نقطه‌ای است؟

۱) نقطهٔ برخورد نیمسازها ۲) نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها

۳) نقطهٔ برخورد میانه‌ها ۴) نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌ها

۱۰- در مثلث ABC بین زاویه‌ها رابطهٔ $\hat{B}-\hat{C}=\hat{A}$ برقرار است. نقطهٔ تلاقی ارتفاع‌های این مثلث کجا قرار دارد؟

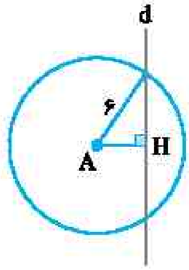
۱) درون مثلث ۲) بیرون مثلث ۳) روی ضلع AC ۴) روی رأس B

فصل ۱ آزمون ۱

۱- گزینهٔ ۳ می‌دانیم نقطه‌هایی که از A به فاصلهٔ ۶ قرار دارند دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۶ تشکیل می‌دهند. از فرض سؤال نتیجه می‌گیریم این دایره خط d را باید در دو نقطه قطع کند. پس فاصلهٔ A از خط d کوچک‌تر از ۶ و مسلماً عددی مثبت است.

$$0 \le AH < 6 \Rightarrow 0 \le 2m+3 < 6 \Rightarrow -3 \le 2m < 3 \Rightarrow -\frac{3}{2} \le m < \frac{3}{2}$$

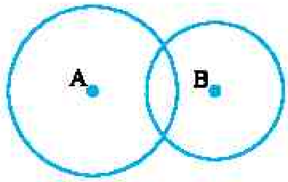
در این فاصله m مقادیر صحیح ۱-، صفر و ۱ را می‌تواند بگیرد.



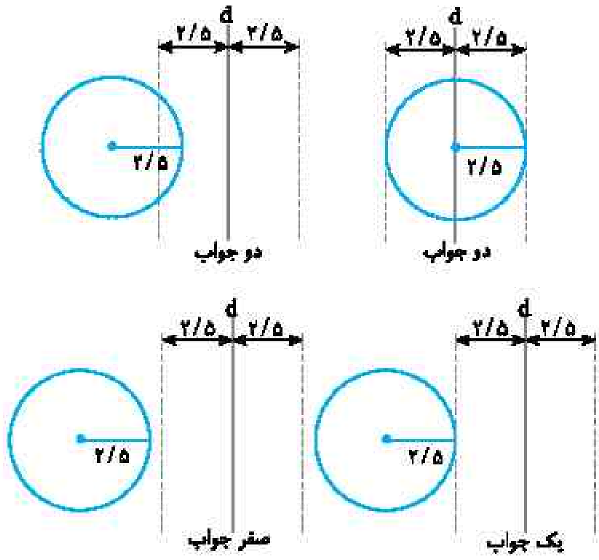
۲- گزینهٔ ۱ برای این منظور، باید دایرهٔ به مرکز A و شعاع $x+1$ و دایره به مرکز B و شعاع $2x-1$ متقاطع باشند. یعنی

$$(2x-1)-(x+1) < AB < x+1+2x-1 \Rightarrow x-2 < 4x-5 < 3x$$

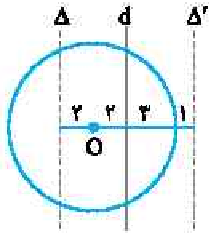
یعنی $1<x<5$. چون x عدد صحیح است، پس $x\in\{2,3,4\}$.



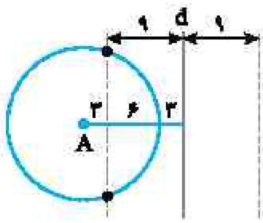
۳- گزینهٔ ۱ مجموعهٔ نقاطی که از خط d به فاصلهٔ ۲/۵ واحد باشند دو خط موازی d در طرفین آن است. چون قطر دایره برابر ۵ است و فاصلهٔ این دو خط موازی هم برابر ۵ است، پس نقاط تلاقی دو خط موازی با دایره حداکثر ۲ نقطه است (شکل‌ها را ببینید). به عبارت دیگر با توجه به داده‌های سؤال حالتی که هر دو خط موازی دایره را در دو نقطه قطع کند به وجود نمی‌آید.



۴- گزینهٔ ۲ بنابر داده‌های سؤال خط d از مرکز O به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر است. در ضمن نقطه‌هایی که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر هستند دو خط موازی d در طرفین آن هستند. با توجه به شکل فقط یکی از این دو خط موازی دایره را در دو نقطه قطع می‌کند و این دو نقطه جواب این سؤال هستند.



۵- گزینهٔ ۴ مجموعهٔ نقطه‌هایی که از A به فاصلهٔ ۹ هستند دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۹ است و مجموعهٔ نقطه‌هایی که از d به فاصلهٔ ۹ هستند دو خط موازی d در طرفین آن به فاصلهٔ ۹ از آن هستند. با توجه به شکل، محل تلاقی این دو خط با دایره جواب این سؤال است که دقیقاً دو نقطه است.

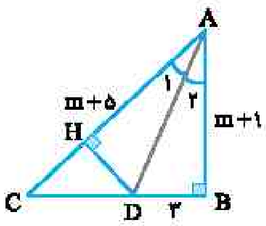


۶- گزینهٔ ۱ می‌دانیم فاصلهٔ هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه یکسان است. پس اگر عمود DH را بر ضلع AC رسم کنیم، آن‌گاه $DH=DB=3$. بنابراین

$$\begin{cases} AD=AD \\ DB=DH \\ \hat{B}=\hat{H}=90^\circ \end{cases} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع قائمه}} \begin{array}{l} \triangle ABD\cong\triangle ADH \\ AH=AB=m+1 \end{array}$$

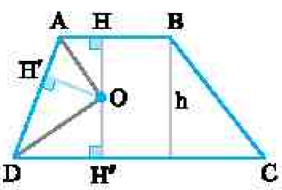
پس $CH=AC-AH=(m+5)-(m+1)=4$. در نتیجه

$$\triangle CDH: CD^2=CH^2+DH^2=4^2+3^2=25\Rightarrow CD=5$$



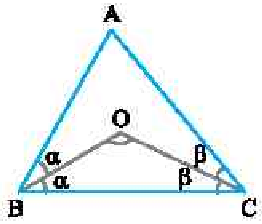
۷- گزینهٔ ۳ می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین عمودهای OH، ′OH و ″OH برابرند. اگر h فاصلهٔ B از قاعدهٔ DC باشد، آن‌گاه

$$OH=OH'=OH''=\frac{h}{2}\Rightarrow OH+OH'+OH''=3\frac{h}{2}=3\left(\frac{6}{2}\right)=9$$



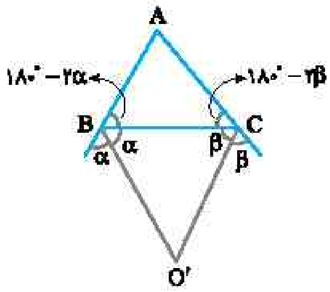
۶- گزینه «۴» اگر O نقطهٔ تلاقی دو نیمساز $\hat{B}$ و $\hat{C}$ باشد. با توجه به داده‌های روی شکل می‌توان نوشت

$$\begin{cases}\hat{A}=180^\circ-2(\alpha+\beta)\\ \hat{O}=180^\circ-(\alpha+\beta)\end{cases}\Rightarrow \hat{O}=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$$



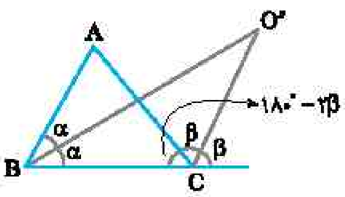
در ضمن اگر O' نقطهٔ تلاقی دو نیمساز زاویه‌های خارجی B و C باشد. آن‌گاه با توجه به داده‌های روی شکل می‌توان نوشت

$$\begin{cases}\hat{A}+180^\circ-2\alpha+180^\circ-2\beta=180^\circ\\ \hat{A}=2(\alpha+\beta)-180^\circ\\ \hat{O}'=180^\circ-(\alpha+\beta)\end{cases}\Rightarrow \hat{O}'=90^\circ-\frac{\hat{A}}{2}$$



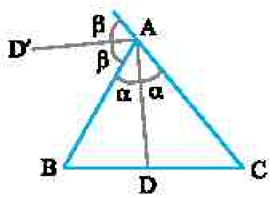
از طرف دیگر اگر O'' نقطهٔ تلاقی نیمساز زاویهٔ B و نیمساز زاویهٔ خارجی C باشد. آن‌گاه با توجه به داده‌های روی شکل می‌توان نوشت

$$\begin{cases}\hat{O}''+\alpha+\beta+180^\circ-2\beta=180^\circ\Rightarrow \hat{O}''=\beta-\alpha\\ 2\beta=\hat{A}+2\alpha\Rightarrow \hat{A}=2(\beta-\alpha)\ :\ \text{زاویهٔ خارجی}\ C\end{cases}\Rightarrow \hat{O}''=\frac{\hat{A}}{2}$$



در صورتی که AD نیمساز زاویهٔ داخلی A و AD' نیمساز زاویهٔ خارجی A باشد با توجه به داده‌های روی شکل می‌توان نوشت

$$2\alpha+2\beta=180^\circ\Rightarrow\alpha+\beta=90^\circ\Rightarrow D\hat{A}D'=90^\circ$$

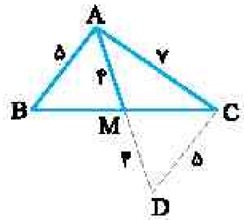


۷- گزینه «۱» می‌دانیم هر نقطه روی نیمساز یک زاویه از دو ضلع آن به یک فاصله است. پس نقطهٔ همرسی نیمسازهای هر مثلث از سه ضلع به یک فاصله است. بنابراین

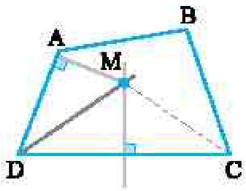
$$m-4=2m-10\Rightarrow m=6$$

درنتیجه فاصلهٔ نقطهٔ همرسی نیمسازها از ضلع بزرگ‌تر برابر $m-4=6-4=2$ است.

۸- گزینه «۲» فرض کنید ABC مثلث مورد نظر باشد. میانهٔ AM را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ D برسیم. در این صورت دو مثلث AMB و MDC همنهشت می‌شوند. بنابراین $DC=AB=5$. در نتیجه سه ضلع مثلث ADC معلوم است (۸، ۷ و ۵) و با داشتن سه ضلع مثلث فقط یک مثلث ADC و در نتیجه یک مثلث ABC قابل رسم است. توجه کنید گزینه‌های (۱) و (۴) با هم متفاوت هستند. در گزینهٔ (۴) مطرح شده است که مثلث با این اطلاعات وجود ندارد ولی در گزینهٔ (۱) مطرح شده است با این اطلاعات نمی‌توان مثلث را با خط‌کش و پرگار رسم کرد و به اطلاعات دیگری نیز احتیاج داریم.



۹- گزینه «۳» چون M از دو سر پاره‌خط CD به یک فاصله است روی عمودمنصف ضلع CD است. از طرف دیگر چون M از دو ضلع DA و DC به یک فاصله است، پس روی نیمساز زاویهٔ D قرار دارد. بنابراین M محل برخورد عمودمنصف CD و نیمساز زاویهٔ D است.



۱۰- گزینه «۳» متوازی‌الاضلاعی که طول قطرهای آن ۲ و ۳ سانتی‌متر است جواب است. چون زاویهٔ بین دو قطر مشخص نیست پس با این معلومات نامتناهی متوازی‌الاضلاع قابل رسم است.

فصل ۱ آزمون ۲

۱- گزینه «۲» در استدلال استقرایی با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت به درستی آن موضوع در حالت کلی می‌رسیم. به عبارت دیگر از جزء به کل می‌رسیم. مسلماً با چنین استدلالی نمی‌توان همواره به درستی نتیجهٔ گرفته شده مطمئن بود.

۲- گزینه «۴» مسلماً زاویهٔ مقابل به بزرگ‌ترین ضلع در هر مثلث لزوماً قائمه نیست. به عبارت دیگر. عکس قضیهٔ مطرح شده در گزینهٔ (۴) به صورت «اگر یک ضلع مثلثی بزرگ‌ترین ضلع باشد. آن‌گاه زاویهٔ مقابل آن قائمه است» لزوماً درست نیست.

۳- گزینه «۴» در برهان خلف، فرض را نقیض حکم انتخاب می‌کنیم. صورت شرطی این قضیه به شکل «اگر $\hat{A}>\hat{B}$، آن‌گاه $BC>AC$» است. پس $BC>AC$ حکم این قضیه است و نقیض این حکم $BC\not>AC$. یعنی $BC<AC$ یا $BC=AC$ است.

۴- گزینه «۳» در مثلث قائم‌الزاویه نقطهٔ همرسی عمودمنصف‌های اضلاع وسط وتر است. پس مثلث قائم‌الزاویه مثال نقض برای حکم مورد نظر است.

۵- گزینه «۳» نقیض گزارهٔ «مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است» گزارهٔ «چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر مثلث 180° است» یا «مثلثی وجود دارد که مجموع زاویه‌های داخلی آن 180° نیست» است.